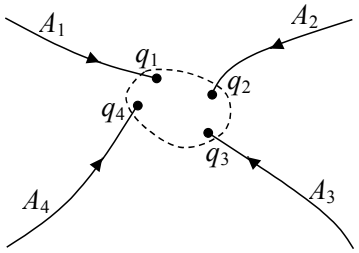
8. Энергия электрического поля

Краткие теоретические сведения

Энергия взаимодействия точечных зарядов

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна работе внешних сил по созданию данной системы (см. рис.1) посредством медленного (квазистатического) перемещения зарядов из бесконечно удаленных друг от друга точек в заданные положения. Эта энергия зависит только от конечной конфигурации системы, но не от способа, каким эта система была создана.



$$W_{1234} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Рис.1

Основываясь на таком определении, можно получить следующую формулу для энергии взаимодействия двух точечных зарядов, расположенных в вакууме на расстоянии r_{12} друг от друга:

$$\boxed{W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}. \qquad (1)$$

Если система содержит три неподвижных точечных заряда, то энергия их взаимодействия равна сумме энергий всех парных взаимодействий:

$$W_{123} = W_{12} + W_{13} + W_{23} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}},$$

где r_{12} – расстояние между первым и вторым, r_{13} - между первым и третьим, r_{23} – между вторым и третьим зарядами. Аналогично вычисляется электрическая энергия взаимодействия системы из N точечных зарядов:

$$\boxed{W_{\text{вз}} = W_{12} + W_{13} + \ldots + W_{23} + \ldots = \sum_{i<j} W_{ij}}. \qquad (2)$$

Например, для системы из 4-х зарядов формула (2) содержит 6 слагаемых.

Электрическая энергия заряженных проводников

Электрическая энергия уединенного заряженного проводника равна работе, которую нужно совершить, чтобы нанести на проводник данный заряд, медленно перемещая его бесконечно малыми порциями из бесконечности, где изначально эти порции заряда не взаимодействовали. Электрическую энергию уединенного проводника можно вычислить по формуле

$$\boxed{W = \frac{1}{2} q\varphi}, \qquad (3)$$

где q – заряд проводника, φ - его потенциал. В частности, если заряженный проводник имеет форму шара и расположен в вакууме, то его потенциал $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 R$ и, как следует из (3), электрическая энергия равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

где R – радиус шара, q – его заряд.

Аналогично определяется электрическая энергия нескольких заряженных проводников – она равна работе внешних сил по нанесению данных зарядов на проводники. Для электрической энергии системы из N заряженных проводников можно получить формулу:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum q_i \varphi_i}, \qquad (4)$$

где q_i и φ_i - заряд и потенциал i-го проводника. Заметим, что формулы (3), (4) справедливы и в том случае, когда заряженные проводники находятся не в вакууме, а в изотропном нейтральном диэлектрике.

При помощи (4) вычислим электрическую энергию заряженного конденсатора. Обозначив заряд положительной обкладки q, ее потенциал φ_1, а потенциал отрицательной обкладки φ_2, получим :

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{1}{2}qU,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение на конденсаторе. Учитывая, что $q = CU$, формулу для энергии конденсатора можно представить также в виде

$$\boxed{W = CU^2/2 = q^2/2C}, \qquad (5)$$

где C – емкость конденсатора.

Собственная электрическая энергия и энергия взаимодействия

Рассмотрим электрическую энергию двух проводящих шаров, радиусы которых R_1, R_2, а заряды q_1, q_2. Будем считать, что шары расположены в вакууме на большом по сравнению с их радиусами расстоянии l друг от друга. В этом случае расстояние от центра одного шара до любой точки поверхности другого примерно равно l и потенциалы шаров можно выразить формулами:

$$\varphi_1 \approx \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}, \quad \varphi_2 \approx \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Электрическую энергию системы найдем при помощи (4):

$$W = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Первое слагаемое в полученной формуле – энергия взаимодействия зарядов, расположенных на первом шаре. Эту энергию называют собственной электрической энергией (первого шара). Аналогично, второе слагаемое – собственная электрическая энергия второго шара. Последнее слагаемое – энергия взаимодействия зарядов первого шара с зарядами второго.

При $l >> R_1, R_2$ электрическая энергия взаимодействия существенно меньше суммы собственных энергий шаров, однако при изменении расстояния между шарами собственные энергии остаются практически постоянными и изменение полной электрической энергии примерно равно изменению энергии взаимодействия. Этот вывод справедлив не только для проводящих шаров, но и для заряженных тел произвольной формы, расположенных на большом расстоянии друг от друга: приращение электрической энергии системы равно приращению энергии взаимодействия заряженных тел системы: $\Delta W = \Delta W_{\text{вз}}$. Энергия взаимодействия $W_{\text{вз}}$ удаленных друг от друга тел не зависит от их формы и определяется формулой (2).

При выводе формул (1), (2) каждый из точечных зарядов рассматривался как нечто целое и неизменное. Учитывалась только работа, совершаемая при сближении таких неизменных зарядов, но не на их образование. Напротив, при выводе формул (3), (4) учитывалась также работа, совершаемая при нанесении зарядов q_i на каждое из тел системы путем переноса электричества бесконечно малыми порциями из бесконечно удаленных точек. Поэтому формулы (3), (4) определяют полную электрическую энергию системы зарядов, а формулы (1), (2) только электрическую энергию взаимодействия точечных зарядов.

Объемная плотность энергии электрического поля

Электрическую энергию плоского конденсатора можно выразить через напряженность поля между его обкладками:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V ,$$

где $V = Sd$ - объем пространства, занятого полем, S – площадь обкладок, d – расстояние между ними. Оказывается, через напряженность можно выразить электрическую энергию и произвольной системы заряженных проводников и диэлектриков:

$$\boxed{W = \int w dV}, \qquad (5)$$

где

$$\boxed{w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 / 2},$$

а интегрирование проводится по всему пространству, занятому полем (предполагается, что диэлектрик изотропный и $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$). Величина w представляет собой электрическую энергию, приходящуюся на единицу объема. Вид формулы (5) дает основания предположить, что электрическая энергия заключена не во взаимодействующих зарядах, а в их электрическом поле, заполняющем пространство. В рамках электростатики это предположение проверить экспериментально или обосновать теоретически невозможно, однако рассмотрение переменных электрических и магнитных полей позволяет удостоверится в правильности такой полевой интерпретации формулы (5).

Примеры решения задач

Энергия взаимодействия зарядов

Пример 1.

Определите электрическую энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a (см. рис.2).

Решение.

На рис.3 условно изображены двунаправленными стрелками все парные взаимодействия зарядов. Учитывая энергии всех этих взаимодействий, получим:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-4\frac{q^2}{a} + 2\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\right).$$

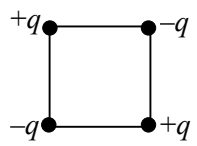


Рис.2

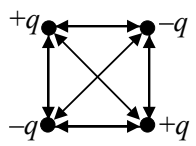


Рис.3

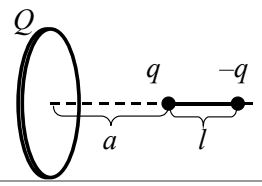


Рис.4

Пример 2.

Определите электрическую энергию взаимодействия заряженного кольца с диполем, расположенным на его оси, как показано на рис.4. Известны расстояния a, l, заряды Q, q и радиус кольца R.

Решение.

При решении задачи следует учесть все энергии парных взаимодействий зарядов одного тела (кольца) с зарядами другого тела (диполя). Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядом Q, распределенным по кольцу, определяется суммой

$$W_1 = \sum \frac{\Delta Q_i q}{4\pi\varepsilon_0 r_i},$$

где ΔQ_i - заряд бесконечно малого фрагмента кольца, r_i - расстояние от этого фрагмента до заряда q. Поскольку все r_i одинаковы и равны $\sqrt{R^2 + a^2}$, то

$$W_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}\sum \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Аналогично найдем энергию взаимодействия точечного заряда $-q$ с заряженным кольцом:

$$W_2 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}\sum \Delta Q_i = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}.$$

Суммируя W_1 и W_2, получим для энергии взаимодействия кольца с диполем:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a+l)^2}}\right).$$

Электрическая энергия заряженных проводников

Пример 3.

Определите работу электрических сил при уменьшении в 2 раза радиуса однородно заряженной сферы. Заряд сферы q, ее первоначальный радиус R.

Решение.

Электрическая энергия уединенного проводника определяется формулой $W = (1/2)q\varphi$, где q – заряд проводника, φ - его потенциал. Учитывая, что потенциал однородно заряженной сферы радиуса R равен $\varphi = q/4\pi\varepsilon_0 R$, найдем ее электрическую энергию:

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

После уменьшения в два раза радиуса сферы ее энергия становится равной

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Электрические силы при этом совершают работу

$$A = W_1 - W_2 = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Пример 4.

Два металлических шара, радиусы которых r и $2r$, а соответствующие заряды $2q$ и $-q$, расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Во сколько раз уменьшится электрическая энергия системы, если шары соединить тонкой проволокой?

Решение.

После соединения шаров тонкой проволокой их потенциалы становятся одинаковыми

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)},$$

а установившиеся заряды шаров Q_1 и Q_2 получаются в результате перетекания заряда с одного шара на другой. При этом суммарный заряд шаров остается постоянным:

$$Q_1 + Q_2 = 2q - q.$$

Из этих уравнений найдем

$$Q_1 = q/3, \quad Q_2 = 2q/3.$$

Энергия шаров до соединения их проволокой равна

$$W_1 = \frac{(2q)^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{(-q)^2}{8\pi\varepsilon_0 (2r)},$$

а после соединения

$$W_2 = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 (2r)}.$$

Подставляя в последнее выражение значения Q_1 и Q_2, получим после простых преобразований

$$W_1 / W_2 = 27/2 .$$

Пример 5.

В один шар слились $N = 8$ одинаковых шариков ртути, заряд каждого из которых q. Считая, что в начальном состоянии ртутные шарики находились на большом расстоянии друг от друга, определите, во сколько раз увеличилась электрическая энергия системы.

Решение.

При слиянии ртутных шариков сохраняется их суммарный заряд и объем:

$$Nq = Q ,$$

$$N(4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi R^3 ,$$

где Q – заряд шара, R – его радиус, r – радиус каждого маленького ртутного шарика. Суммарная электрическая энергия N уединенных шариков равна

$$W_1 = N\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} .$$

Электрическая энергия полученного в результате слияния шара

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} .$$

После алгебраических преобразований получим

$$W_2 / W_1 = N^{2/3} = 4.$$

Пример 6.

Металлический шарик радиуса $R = 1$ мм и заряда $q = 0{,}1$ нКл с большого расстояния медленно приближают к незаряженному проводнику и останавливают, когда потенциал шарика становится равным $\varphi = 450$ В. Какую работу для этого следует совершить?

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) ,$$

где q_1 и q_2 – заряды проводников, φ_1 и φ_2 – их потенциалы. Так как проводник по условию задачи не заряжен, то

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 ,$$

где q_1 и φ_1 заряд и потенциал шара. Когда шар и незаряженный проводник находятся на большом расстоянии друг от друга,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} ,$$

и электрическая энергия системы

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} .$$

В конечном состоянии системы, когда потенциал шара стал равным φ, электрическая энергия системы:

$$W_2 = \frac{q\varphi}{2}.$$

Работа внешних сил равна приращению электрической энергии:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q\varphi}{2} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -0{,}0225 \text{ мкДж}.$$

Заметим, что электрическое поле в конечном состоянии системы создается зарядами, индуцированными на проводнике, а также зарядами, неоднородно распределенными по поверхности металлического шара. Рассчитать это поле при известной геометрии проводника и заданном положении металлического шара весьма непросто. Нам не потребовалось этого делать, поскольку в задаче задана не геометрическая конфигурация системы, а потенциал шара в конечном состоянии.

Пример 7.

Система состоит из двух концентрических тонких металлических оболочек с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и соответствующими зарядами q_1 и q_2. Найдите электрическую энергию W системы. Рассмотрите также специальный случай, когда $q_2 = -q_1$.

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right).$$

Для решения задачи необходимо найти потенциалы внутренней (φ_1) и внешней (φ_2) сфер. Это нетрудно сделать (см. соответствующий раздел пособия):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для энергии, получим

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2}\right).$$

При $q_2 = -q_1$ энергия равна

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Собственная электрическая энергия и энергия взаимодействия

Пример 8.

Две проводящие сферы, заряды которых q и $-q$, радиусы R_1 и R_2, расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Сфера большего радиуса R_2 состоит из двух полусфер. Полусферы разъединяют, подносят их к сфере радиуса R_1, и вновь соединяют, образуя таким образом сферический конденсатор. Определите работу электрических сил при таком составлении конденсатора.

Решение.

Электрическая энергия двух удаленных друг от друга заряженных сфер равна

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Электрическая энергия полученного сферического конденсатора:

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(q\varphi_1 - q\varphi_2\right),$$

где

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

- потенциал внутренней сферы, $\varphi_2 = 0$ - потенциал внешней сферы. Следовательно,

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Работа электрических сил при таком составлении конденсатора:

$$A = W_1 - W_2 = q^2 / 4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Заметим, что электрическая энергия сферического конденсатора W_2 равна работе внешних сил по зарядке конденсатора. При этом электрические силы совершают работу $A_{ЭЛ} = -W_2$. Эта работа совершается не только при сближении заряженных обкладок, но и при нанесении заряда на каждую из обкладок. Поэтому $A_{ЭЛ}$ отличается от найденной выше работы A, совершенной электрическими силами только при сближения обкладок.

Пример 9.

Точечный заряд q = 1,5 мкКл расположен в центре сферической оболочки, по поверхности которой однородно распределен заряд Q = 5 мкКл. Найдите работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении ее радиуса от R_1 = 50 мм до R_2 = 100 мм.

Решение.

Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядами, расположенными на сферической оболочке радиуса R равна

$$W_1 = \sum_i \frac{q\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_i \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

Собственная электрическая энергия оболочки (энергия взаимодействия зарядов оболочки между собой) равна:

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Работа электрических сил при расширении оболочки:

$$A=\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}\right)-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}\right).$$

После преобразований получим

$$A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(q+\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=1{,}8\text{ Дж}.$$

Другой способ решения

Точечный заряд представим в виде однородно заряженной сферы малого радиуса r и заряда q. Полная электрическая энергия системы равна

$$W=\frac{1}{2}(q\varphi_r+Q\varphi_R),$$

где

$$\varphi_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса r,

$$\varphi_R=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса R. При расширении внешней сферы электрические силы совершают работу

$$A=W(R_1)-W(R_2).$$

После подстановок и преобразований получим ответ.

Объемная плотность энергии электрического поля

Пример 10.

Какая часть электрической энергии заряженного проводящего шара, расположенного в вакууме, заключена в пределах концентрической с шаром воображаемой сферы, радиус которой в n раз больше радиуса шара?

Решение.

Объемная плотность энергии электрического поля

$$w=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

определяет электрическую энергию $dW=wdV$, локализованную в бесконечно малом объеме dV (E – модуль вектора напряженности электрического поля в этом объеме, ε - диэлектрическая проницаемость). Чтобы вычислить полную электрическую энергию заряженного проводящего шара, мысленно разобьем все пространство на бесконечно тонкие шаровые слои, концентрические с заряженным шаром. Рассмотрим один из таких слоев радиуса r и толщины dr (см. рис.5). Его объем равен

$$dV=4\pi r^2 dr,$$

а сосредоточенная в слое электрическая энергия

$$dW = w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr .$$

Напряженность E поля заряженного проводящего шара зависит, как известно, от расстояния r до центра шара. Внутри шара $E = 0$, поэтому при вычислении энергии достаточно рассматривать только те шаровые слои, радиус r которых превышает радиус шара R.

При $r > R$ напряженность поля

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$ и, следовательно

$$dW = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr,$$

где q – заряд шара.

Полная электрическая энергия заряженного шара, определяется интегралом

$$W_{\text{п}} = \int_R^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

а энергия, сосредоточенная внутри воображаемой сферы радиуса nR, равна

$$W = \int_R^{nR} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{W}{W_{\text{п}}} = \frac{n-1}{n}.$$

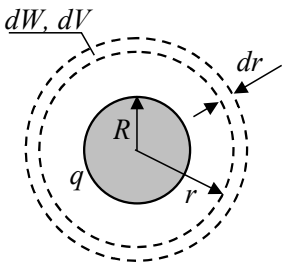


Рис.5

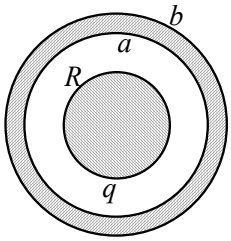


Рис.6

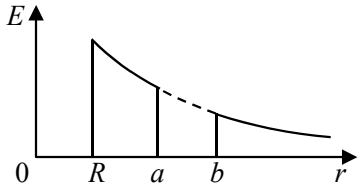


Рис.7

<u>Пример 11.</u>

Определите электрическую энергию системы, состоящей из заряженного проводящего шара и концентрического с ним незаряженного проводящего шарового слоя (рис.6). Внутренний и внешний радиусы слоя a и b, радиус шара $R < a$, заряд q, система находится в вакууме.

<u>Решение</u>.

На внутренней и внешней поверхностях шарового слоя распределены индуцированные заряды. Их алгебраическая сумма равна нулю, поэтому индуцированные заряды не создают элек-

трического поля при $r > b$, где r – расстояние от центра системы. В области $r < a$ напряженность поля индуцированных зарядов также равна нулю, поскольку они однородно распределены по сферическим поверхностям. Таким образом, электрическое поле системы совпадает с полем однородно заряженной по поверхности сферы, за исключением внутренней области шарового слоя, где $E = 0$. На рис.7 приведен примерный график зависимости $E(r)$. Опуская подробные выкладки (см. пример 10), запишем для электрической энергии системы:

$$W = \int_R^a wdV + \int_b^\infty wdV ,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$, $w = (\varepsilon_0 E^2)/2$, $E = |q|/4\pi\varepsilon_0 r^2$. После интегрирования получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

<u>Пример 12.</u>

Первоначально заряд q распределен однородно по объему шара радиуса R. Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу совершают при этом электрические силы? Диэлектрическую проницаемость считайте равной единице.

<u>Решение</u>.

Работа электрических сил равна убыли электрической энергии:

$$A = W_1 - W_2 ,$$

где W_1 – электрическая энергия однородно заряженного по объему шара, W_2 – энергия того же шара, однородно заряженного по поверхности. Поскольку суммарный заряд в обоих случаях одинаков, то электрическое поле вне шара при переходе заряда из объема на поверхность не изменяется. Электрическое поле и энергия изменяются только внутри шара.
При помощи теоремы Гаусса можно вывести формулу для напряженности поля внутри однородно заряженного шара на расстоянии r от его центра:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} .$$

Электрическая энергия, сосредоточенная внутри шара, определяется интегралом:

$$W_{1\,\text{внутр}} = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} .$$

Когда все заряды перешли на поверхность шара, электрическое поле, а следовательно, и энергия электрического поля внутри шара стали равными нулю. Таким образом,

$$A = W_1 - W_2 = W_{1\,\text{внутр}} = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} .$$